

Equilibrio general con Intercambio Puro. El caso n -dimensional

Fernando Sánchez López

Bulmaro Álvarez Estrada

19 de junio de 2017

Introducción

En este trabajo presentamos una visión general y matemáticamente rigurosa de los principales temas sobre el equilibrio general, y se dirige principalmente a estudiantes de la Licenciatura en Actuaría de quinto semestre en adelante que hayan acreditado los cursos de cálculo y se hallen cursando la materia de análisis matemático, o bien a economistas con una sólida formación matemática.

El objetivo de este trabajo es servir, ya sea como apoyo para el estudio de los temas de equilibrio general cubiertos en los temarios de Economía I y Economía II de la Facultad de Ciencias de la UNAM, o bien para que el estudiante cuente con un material que le brinde conocimientos teóricos mediante el estudio autodidacta.

Para lograr dicho objetivo el estudio que aquí se realiza se ha dividido en cinco partes: 1) preliminares, 2) la ley de Walras y sus corolarios, 3) existencia y unicidad del equilibrio, 4) los teoremas del bienestar, y, finalmente, 5) un apartado de consideraciones finales.

1. Preliminares

1.1. La demanda y la oferta

Este apartado tiene como objetivo presentar las definiciones y resultados básicos referentes a la teoría de la demanda del consumidor y la demanda de mercado útiles además de necesarios para nuestro objetivo de estudiar el intercambio.

Así pues, debemos comenzar por definir la función de demanda.

Definición 1. A la función que relaciona la cesta demandada con los precios y la renta se le llama función de demanda y se le denota como $\mathbf{x}(\mathbf{p}, m)$, donde $\mathbf{p}$ son los precios y m es el ingreso del consumidor.

Como sabemos la demanda del consumidor es resultado del proceso de optimización restringido al conjunto presupuestario del mismo consumidor.

Ahora bien, para cumplir con el objetivo de estudiar el intercambio puro es necesario que se tome en cuenta la forma en que se determina la renta. Para cubrir esta necesidad consideraremos que el consumidor cuenta con una dotación inicial de bienes $\omega = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, los cuales puede vender a los precios de mercado $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$. Se sigue entonces que la renta de cada consumidor está dada por el valor de su dotación inicial a los precios de mercado, esto es $m = \mathbf{p}\omega$.

Así pues, dado este nuevo supuesto, el problema de optimización que debe resolver cada agente está dado por

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{x}} u_i(\mathbf{x}) \\ & \text{sujeto a } \mathbf{p}\mathbf{x}_i = \mathbf{p}\omega_i \end{aligned} \tag{1}$$

El programa 1, arriba descrito, señala que el consumidor intenta maximizar su función de utilidad con la restricción de que el valor de su ingreso debe ser igual al valor de su consumo. La solución a este problema está dada por la función de demanda $x_i(\mathbf{p}, \mathbf{p}\omega)$.

Definición 2. Se le llama demanda agregada o demanda de mercado a la suma de todas las funciones de demanda individuales, esto es $\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i(\mathbf{p}, \mathbf{p}\omega)$.

Por lo que, como cada consumidor tiene una dotación inicial, entonces podemos definir la función de oferta agregada en el caso del intercambio puro:

Definición 3. A la suma de las dotaciones iniciales de todos los consumidores se le llama oferta agregada u oferta de mercado, es decir $\sum_{i=1}^n \omega_i$.

Entonces, dadas las definiciones 2 y 3 podemos dar la siguiente definición:

Definición 4. A la función

$$\mathbf{z}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i(\mathbf{p}, \mathbf{p}\omega) - \sum_{i=1}^n \omega_i$$

se le llama *ecuación de exceso de demanda*.

1.2. Las asignaciones de mercado

Debemos comenzar en esta sección por presentar la definición de una asignación de mercado.

Definición 5. Una asignación de mercado es un conjunto de n cestas de consumo

$$A = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$$

que indica lo que posee cada agente.

En otras palabras, una asignación es el conjunto de las cestas de consumo de todos los agentes en el mercado. En este sentido, cuando tomamos el elemento i -ésimo del conjunto A , estamos tomando la cesta de consumo que corresponde al agente i -ésimo.

Por otro lado, lo que se puede consumir de un bien debe estar restringido a lo que se oferta del mismo, es decir, un agente no puede adquirir más de lo que haya disponible en el mercado, y es claro que a lo más podrá tener la misma cantidad que se oferta. Por lo que necesitamos una definición que nos ayude a decir cuando una asignación es viable.

Definición 6. Se dice que una asignación es viable si es físicamente posible.

En este sentido, en el caso del intercambio puro, se puede redefinir una asignación viable de la siguiente manera:

Definición 7. Se dice que una asignación es viable si agota todos los bienes, es decir si satisface que

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^n \omega_i$$

donde ω_i representa los bienes que los consumidores llevan al mercado.

Lo anterior significa que en el intercambio puro, una asignación es viable si hace que la demanda de cada bien sea igual a lo que se oferta del mismo.

No obstante, la definición 7 es muy estricta, por lo que se le suele debilitar diciendo que una asignación es viable si satisface la siguiente condición:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \leq \sum_{i=1}^n \omega_i$$

Esta nueva condición nos dice que una asignación en intercambio puro es viable, si la cantidad que se demandada de cada bien no supera la existencia del mismo en el mercado. En otras palabras, una asignación es viable si no existen excesos de demanda.

1.3. El *simplex* de los precios

En el subapartado anterior vimos algunas de las definiciones más importantes relacionadas a la oferta y la demanda cuando se está en un sistema de intercambio puro. Una de las principales propiedades de la demanda es que es homogénea de grado cero en los precios, lo cual se prueba a continuación.

Proposición 1. *La función de demanda del consumidor es homogénea de grado cero en $(\mathbf{p}, \mathbf{p}\omega)$.*

Demostración. Basta observar que el conjunto presupuestario $B(\mathbf{p}, \mathbf{p}\omega)$ no se altera si los precios y la renta se multiplican por una cantidad estrictamente mayor que cero, por lo que

$$x_i(\mathbf{p}, \mathbf{p}\omega) = x_i(t\mathbf{p}, t\mathbf{p}\omega)$$

para $t \in [0, 1]$. Con lo que queda demostrado. $\square$

La proposición anterior es de mucha importancia para el estudio del intercambio, pues nos permite normalizar los precios utilizando la *fórmula*:

$$\hat{p}_i = \frac{p_i}{\sum_{j=1}^k p_j}$$

ya que con esta se garantiza que $\sum_{i=1}^n \hat{p}_i = 1$. Luego, es posible restringir el estudio a los vectores que conforman el simplejo unitario, el cual se define a continuación:

Definición 8. Se define el simplex de los precios de dimensión $k - 1$ como el conjunto

$$S^{k-1} := \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^k : \sum_{i=1}^k \hat{p}_i = 1 \right\}$$

En adelante supondremos que todos los precios pertenecen al simplex unitario, por lo que se utilizará simplemente p para denotarlos

Proposición 2. *El simplex de los precios es un conjunto convexo y compacto.*

Demostración. Probaremos primero que el simplex es un conjunto convexo. Para ello, consideremos los vectores de precios $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in S^{k-1}$ entonces tenemos que demostrar que $t\mathbf{p}_1 + (1 - t)\mathbf{p}_2 \in S^{k-1}$ con $t \in [0, 1]$.

Supongamos que

$$\mathbf{p}_1 = (p_1, p_2, \dots, p_k) \text{ y } \mathbf{p}_2 = (p'_1, p'_2, \dots, p'_k)$$

y ya que $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in S^{k-1}$, entonces

$$t \sum_{i=1}^k p_i = t \text{ y } (1 - t) \sum_{i=1}^k p'_i = (1 - t)$$

sumando las dos expresiones anteriores, obtenemos

$$t \sum_{i=1}^k p_i + (1 - t) \sum_{i=1}^k p'_i = t + (1 - t) = 1$$

por lo que $t\mathbf{p}_1 + (1 - t)\mathbf{p}_2 \in S^{k-1}$ para cualquier $t \in [0, 1]$.

Ahora demostraremos que es un conjunto compacto, como $S^{k-1} \subset \mathbb{R}^n$, entonces podemos usar el teorema de Heine-Borel, esto es basta probar que es un conjunto cerrado y acotado.

Para ver que es acotado, basta con observar que se encuentra contenido en la esfera unitaria de $\mathbb{R}^n$. Para ver que es cerrado tenemos que

$$S^{k-1} = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^k : \sum_{i=1}^k \hat{p}_i = 1 \right\} = \{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^k : p_i \geq 0 \} \cap \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^k : \sum_{i=1}^k p_i = 1 \right\}$$

el primero de los conjuntos que forman la intersección es el primer ortante de $\mathbb{R}^k$, mientras que el segundo es un hiperplano de $\mathbb{R}^k$ cuyas componentes suman 1, y de ambos conjuntos se sabe que son cerrados, y como la intersección finita de conjuntos cerrados es cerrada, entonces S^{k-1} es cerrado. $\square$

2. La ley de Walras y sus corolarios

La ley de Walras, uno de los resultados más importantes de la teoría económica, parte de considerar que los consumidores maximizan su función de utilidad con la restricción de que su consumo debe ser igual a su ingreso. Esto es resuelven un programa como (1).

Teorema 1. (Ley de Walras) *Si todos los consumidores resuelven un programa como el (1), y $\mathbf{p} \in S^{k-1}$, entonces $\mathbf{p}z(\mathbf{p}) = 0$.*

Demostración. Por definición de ecuación exceso de demanda tenemos que

$$\mathbf{p}z(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \left[\sum_{i=1}^k x_i(\mathbf{p}, \mathbf{p}\omega) - \sum_{i=1}^k \omega_i \right] = \sum_{i=1}^k [\mathbf{p}x_i(\mathbf{p}, \mathbf{p}\omega) - \mathbf{p}\omega_i] = 0$$

La última igualdad ocurre ya que cada consumidor resuelve el programa 1, por lo que tienen una restricción de la forma $\mathbf{p}x_i = \mathbf{p}\omega_i$, lo que implica $\mathbf{p}x_i - \mathbf{p}\omega_i = 0$, para toda $i = 1, \dots, n$. $\square$

La ley de Walras dice que si todos los consumidores satisfacen su restricción presupuestaria de tal modo que el exceso de demanda de cada uno de ellos es cero, entonces su suma debe serlo también.

Ahora bien, en una economía que satisface la ley de Walras se deben cumplir también los siguientes tres corolarios:

Corolario 1. *Si la demanda es igual a la oferta en $k-1$ mercados, y $p_k > 0$, entonces la demanda debe ser igual a la oferta en el k -ésimo mercado.*

Demostración. Supongamos que en el k -ésimo mercado la oferta es diferente a la demanda, entonces debemos tener $z_k(\mathbf{p}) \neq 0$, de donde $p_k z_k(\mathbf{p}) \neq 0$, pero entonces $\mathbf{p}z(\mathbf{p}) \neq 0$, lo cual no puede ser, pues nuestra economía satisface la ley de Walras. $\square$

Los siguientes corolarios dependen de la definición formal de equilibrio walrasiano, la cual se proporciona en seguida.

Definición 9. Se dice que un par de vectores $(\mathbf{p}^*, \mathbf{x}^*)$ es un equilibrio walrasiano si se satisface la condición

$$\sum_{i=1}^k x_i(\mathbf{p}^*, \mathbf{x}^*) \leq \sum_{i=1}^k \omega_i$$

Es decir, un vector de precios $\mathbf{p}$ es un equilibrio walrasiano si no existe exceso de demanda positivo en ninguno de los bienes.

El siguiente corolario nos da condiciones necesarias para que un mercado haya sobreoferta.

Corolario 2. *Si $\mathbf{p}^*$ es un equilibrio walrasiano y $z_j(\mathbf{p}) < 0$, entonces $p_j^* = 0$.*

Demostración. Como $\mathbf{p}^*$ es un equilibrio walrasiano, entonces debemos tener $z(\mathbf{p}^*) \leq 0$, y por la no negatividad de los precios se sigue que $\mathbf{p}^*z(\mathbf{p}^*) \leq 0$. Supongamos ahora que $p_j^* > 0$, entonces $\mathbf{p}^*z(\mathbf{p}^*) < 0$, lo que contradice la ley de Walras. $\square$

Obsérvese que el corolario 2 nos dice que para que ocurra un exceso de oferta es necesaria la presencia de bienes gratuitos.

El siguiente corolario nos da condiciones para que el mercado se vacíe, y es por ello uno de los más importantes en economía. Asimismo, para poder presentarlo es necesario que demos una definición más.

Definición 10. Se dice que los bienes son deseables si dado $p_i = 0$ se tiene que $z_i(\mathbf{p}) > 0$.

Corolario 3. (Igualdad de la oferta y la demanda) *Si todos los bienes son deseables y $\mathbf{p}^*$ es un equilibrio walrasiano, entonces $z(\mathbf{p}^*) = 0$.*

Demostración. La demostración se hará por doble desigualdad.

$\leq$) Por definición de equilibrio walrasiano $z(\mathbf{p}^*) \leq 0$.

$\geq$) Para demostrar esta desigualdad supongamos que $z(\mathbf{p}^*) < 0$, entonces debemos tener $z_i(\mathbf{p}^*) < 0$, para alguna $i \in \{1, \dots, n\}$, pero por el corolario 2 ocurre que $p_i = 0$, y en este caso, la hipótesis de deseabilidad de los bienes garantiza que $z_i(\mathbf{p}^*) > 0$, lo cual no puede ser. $\square$

En este apartado, hemos definido lo que debe entenderse por equilibrio walrasiano, e incluso hemos visto, mediante los corolarios de la ley de Walras, algunas de las propiedades que estos deben cumplir. No obstante, no nos hemos preocupado por saber si en verdad existen, en la siguiente sección se plantea uno de los teoremas de existencia.

3. Existencia y unicidad de equilibrios

3.1. Existencia del equilibrio walrasiano

El teorema que presentamos para probar la existencia de equilibrios se basa en el teorema del punto fijo de Brower,¹ y se le suele llamar “*teorema principal de existencia de equilibrios*”.

¹Véase el anexo de teoremas.

Teorema 2. Si $\mathbf{z} : S^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ es una función continua que cumple la ley de Walras, entonces existe $\mathbf{p}^* \in S^{k-1}$, tal que $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) \leq 0$.

Demostración. Definamos la función $g : S^{k-1} \rightarrow S^{k-1}$ como:

$$g_i(\mathbf{p}) = \frac{p_i + \max\{0, z_i(\mathbf{p})\}}{1 + \sum_{j=1}^n \max\{0, z_j(\mathbf{p})\}}$$

Obsérvese que la función g es continua, pues por hipótesis $\mathbf{z}$ lo es, además el máximo es una función continua también. Asimismo, $g(\mathbf{p}) \in S^{k-1}$, pues claramente $\sum_{i=1}^n g_i(\mathbf{p}) = 1$, y el denominador nunca es cero, por lo que no se indetermina.

Ahora bien, por el teorema de Brower,² se tiene que existe $\mathbf{p}^* \in S^{k-1}$ tal que $g(\mathbf{p}^*) = \mathbf{p}^*$, por lo que

$$p_i^* = \frac{p_i^* + \max\{0, z_i(\mathbf{p}^*)\}}{1 + \sum_{j=1}^n \max\{0, z_j(\mathbf{p}^*)\}}$$

Debemos demostrar que $\mathbf{p}^*$ es un equilibrio walrasiano. Así pues, de la ecuación anterior se sigue que:

$$p_i^* \sum_{j=1}^n \max\{0, z_j(\mathbf{p}^*)\} = \max\{0, z_i(\mathbf{p}^*)\}$$

Ahora bien, multiplicando ambos lados de la ecuación por $z_i(\mathbf{p}^*)$ y aplicando la suma obtenemos:

$$\sum_{i=1}^n p_i^* z_i(\mathbf{p}^*) \left[\sum_{j=1}^n \max\{0, z_j(\mathbf{p}^*)\} \right] = \sum_{i=1}^n z_i(\mathbf{p}^*) \max\{0, z_i(\mathbf{p}^*)\}$$

pero la función $\mathbf{z}$ cumple la ley de Walras, por lo que

$$\sum_{i=1}^n z_i(\mathbf{p}^*) \max\{0, z_i(\mathbf{p}^*)\} = 0$$

Pero entonces todos los valores de la suma deben ser cero, o bien $(z_i(\mathbf{p}^*))^2$, pero si existiese un valor estrictamente mayor que cero no se cumpliría la igualdad. Por lo que todos los valores deben ser nulos.

Lo anterior implica que $z_i(\mathbf{p}^*) \leq 0$ para toda $i = 1, \dots, n$. Lo que significa que $\mathbf{p}^*$ es un equilibrio walrasiano. $\square$

²Véase anexo de teoremas.

Ahora bien, es necesario que ahondemos en la generalidad de este teorema, ya que suponer que la demanda agregada es continua aun cuando el precio de algún bien es cero es poco razonable.

Para clarificar lo anterior, supongamos que el precio de algún bien es cero y que las preferencias son monótonas, entonces tendríamos que la demanda de dicho bien podría ser infinita, lo que implicaría que la función exceso de demanda podría no estar bien definida ni siquiera en la frontera del *simplex* unitario de los precios.³

3.2. La unicidad del equilibrio

En la subsección precedente demostramos un teorema de existencia de equilibrios que suponía la exclusión de los bienes gratuitos. Sin embargo, tal problema carece de relevancia para analizar la unicidad del equilibrio, ya que podemos excluirllos mediante el supuesto de deseabilidad en los bienes.⁴

La consecuencia inmediata del supuesto anterior es que en cualquier vector de precios de equilibrio, el precio de un bien cualquiera debe ser estrictamente mayor que cero.

Para este trabajo se presenta únicamente una proposición basada en los bienes denominados *sustitutivos brutos* con el fin de ejemplificar que es posible, bajo ciertas condiciones, hallar un equilibrio walrasiano único.

Así pues, debemos partir de dar una definición formal de tales bienes.

Definición 11. Dos bienes i y j son sustitutivos brutos, si dado un vector de precios $\mathbf{p}$, se tiene que

$$\frac{\partial z_j(\mathbf{p})}{\partial p_i} > 0$$

siendo $i \neq j$.

³Para un teorema más fuerte de existencia, con el cual se superan los problemas descritos, véase Mas-Colell, Whinston y Green (1995).

⁴Véase la definición 10.

La definición nos dice que dos bienes son sustitutivos brutos si un aumento en el precio del bien i causa un aumento en el exceso de demanda del bien j .

Proposición 3. *Si todos los bienes son sustitutivos brutos a cualquier nivel de precios, y si $\mathbf{p}^*$ es un equilibrio walrasiano, entonces $\mathbf{p}^*$ es único.*

Demostración. Supongamos que $\mathbf{p}'$ es otro vector de precios de equilibrio, dado que $\mathbf{p}^* > 0$, podemos definir

$$m = \max \frac{p'_i}{p_i^*} \neq 0$$

Entonces, como la función z es homogénea de grado cero, y $\mathbf{p}^*$ es un vector de precios de equilibrio, tendremos que

$$z(\mathbf{p}^*) = z(m\mathbf{p}^*) = 0$$

Ahora bien, por la forma en que se definió m , para algún precio p'_k tendremos que $mp_k^* = p'_k$.

Si ahora permitimos que todos los precios mp_i^* , con excepción de p_k , disminuyan hacia el precio p'_i , entonces dado que el cambio en el nivel precios de $m\mathbf{p}^*$ a $\mathbf{p}'$ debe disminuir todos los precios excepto el k -ésimo, entonces la demanda del bien k -ésimo debe descender, de donde $z(\mathbf{p}') < 0$, por lo que $\mathbf{p}'$ no puede ser un precio de equilibrio. $\square$

De manera intuitiva, la proposición nos dice que si estamos en una economía donde todos los bienes son sustitutivos brutos, entonces cualquier variación en el precio de alguno de ellos provocar a un cambio en el nivel de demanda de los otros, pudiendo aumentar o disminuir, lo que hará que la función exceso de demanda se altere. Es por ello, que una vez que estemos en el equilibrio cualquier perturbación en los precios provocará que salgamos de él.

4. Los Teoremas del Bienestar

En esta sección presentamos la relación que guarda el equilibrio walrasiano con la teoría del bienestar.

4.1. Eficiencia en el sentido de Pareto

En esta subsección presentamos un tratamiento formal a la eficiencia en el sentido de Pareto. Esto es se presentan los conceptos de eficiencia débil y fuerte, y posteriormente se dan condiciones para que sean equivalentes.

Así pues, partimos de considerar la eficiencia débil en el sentido de Pareto.

Definición 12. Se dice que una asignación viable $\mathbf{x}$ es débilmente eficiente en el sentido de Pareto, si no existe ninguna asignación $\mathbf{x}'$ viable tal que todos los agentes la prefieran estrictamente a $\mathbf{x}$.

La definición nos dice que una asignación será débilmente eficiente de Pareto si no existe una asignación que mejore estrictamente el bienestar de todos los agentes.

Definición 13. Se dice que una asignación viable $\mathbf{x}$ es fuertemente eficiente en el sentido de Pareto, si no existe ninguna asignación $\mathbf{x}'$ viable tal que todos los agentes la prefieran débilmente a la asignación $\mathbf{x}$, y alguno la prefiera estrictamente.

La definición nos dice que una asignación es fuertemente eficiente en el sentido de Pareto si no es posible mejorar el bienestar de un agente sin empeorar el de los otros, es decir cuando uno de los agentes mejora, los otros deben quedar al menos como hasta antes de tal mejora se produjera.

El teorema que se presenta a continuación nos da condiciones para que las definiciones anteriores sean equivalentes.

Teorema 3. *Si las preferencias son continuas, fuertemente monótonas y, además, existe un número finito de agentes, entonces las definiciones 12 y 13 son equivalentes.*⁵

Demostración. Es claro que la definición 13 implica la definición 12, pues si no es posible mejorar el bienestar de una sola persona, claramente no será posible mejorar el de todos los agentes.

⁵Los conceptos de monotonía y continuidad en las preferencias pueden consultarse en Debreu (1987), Mas-Colell, Whinston y Green (1995) o en Varian (1992).

Ahora demostraremos que la definición 12 implica la definición 13. Para ello supongamos que es posible mejorar el bienestar de al menos una persona sin empeorar la situación del resto.

Así pues, sea x_i la cesta del agente i -ésimo y sea x'_i la cesta que mejora su bienestar sin empeorar el de los otros agentes. Ahora bien, dado el supuesto de continuidad en las preferencias, la cesta x'_i se puede sustituir por la cesta $\theta x'_i$, con $0 < \theta < 1$, ya que siempre es posible encontrar θ lo suficientemente cercana a 1 para que a pesar de la reducción el agente aumente su bienestar con respecto a la cesta x_i .

Una vez hecho lo anterior, podemos distribuir de manera equitativa lo que se le quitó al consumidor i entre el resto de los consumidores. De este modo, si el consumidor j posee la cesta x_j , la sustituye por

$$x'_j = x_j + \frac{1 - \theta}{n - 1} x'_i \text{ para toda } i \neq j$$

Finalmente, la monotonía fuerte en las preferencias garantiza que todos los agentes ven mejorar su bienestar. $\square$

El teorema 3, nos permite, asumiendo a partir de ahora sus hipótesis, tratar indistintamente la eficiencia fuerte y débil en el sentido de Pareto.

Debe observarse que si bien es cierto que la eficiencia de Pareto no guarda una relación directa con la forma en que se distribuyen los bienes, si la tiene con los niveles de bienestar que pueden llegar a alcanzar los consumidores.

Observación 1. No existe ninguna asignación no eficiente en el sentido de Pareto en la que todos los agentes disfruten de un mayor bienestar con respecto a una que sí lo es.

Nótese que si la hubiera todos los agentes la preferirían, dando lugar a una mejora en el sentido de Pareto.

4.2. Primer teorema del bienestar

Con el primer teorema del bienestar se muestra que un equilibrio walrasiano es eficiente en el sentido de Pareto (o bien, económicamente eficiente).

Teorema 4. (Primer teorema del bienestar) Si $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ es un equilibrio walrasiano, entonces $\mathbf{x}$ es eficiente en el sentido de Pareto.

Demostración. Supongamos que $\mathbf{x}$ no es eficiente en el sentido de Pareto, y que $\mathbf{x}'$ es la asignación que prefieren todos los agentes a $\mathbf{x}$, entonces

$$\mathbf{p}\mathbf{x}'_i > \mathbf{p}\omega_i \text{ con } i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Luego, sumando y usando el hecho de que $\mathbf{x}'$ es una asignación viable se tendrá que

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{p}\mathbf{x}'_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}\omega_i > \sum_{i=1}^n \mathbf{p}\omega_i$$

por ser $\mathbf{p}$ un precio de equilibrio. Lo cual es una contradicción. $\square$

Es claro que el primer teorema del bienestar se deduce directamente de las definiciones de equilibrio walrasiano y eficiencia económica, pues prácticamente no existen supuestos explícitos. A pesar de lo anterior, hay supuestos implícitos, los cuales se enuncian a continuación:

1. A los agentes no les importa lo que consumen los demás.
2. Los agentes se comportan competitivamente.

Con respecto al supuesto 1, supongamos que a un agente le importase lo que consumen los demás, en este caso una vez que cada uno de ellos ha seleccionado su cesta de consumo, y por tanto se tiene la asignación de mercado, aún sería posible que el consumidor a quien le importa el consumo del resto mejorara su bienestar influyendo sobre los demás para que cambiaran su consumo, por lo que la asignación no sería eficiente en el sentido de Pareto.

Por su parte, el supuesto 2 está relacionado con el hecho de que el equilibrio general sólo tiene sentido cuando existen los suficientes agentes para que estos se comporten de manera competitiva, ya que si solamente hay dos, uno de ellos puede considerar el precio de la dotación del otro como dado.

Una vez expuestos los supuestos implícitos que pudieran llegar a apreciarse como salvedades al primer teorema del bienestar, es necesario notar que es un resultado muy poderoso de la teoría económica, pues nos permite ver que una asignación en la que cada uno de los agentes maximiza su bienestar es

un óptimo de Pareto. Así pues, la importancia del resultado radica en que nos proporciona al mercado competitivo como un mecanismo adecuado para hallar asignaciones eficientes.

No obstante, la principal ventaja que resulta de contar con el mercado competitivo como herramienta para asignar de modo eficiente los bienes, es la poca cantidad de información que necesitan los agentes, pues basta que conozcan los precios para que puedan tomar sus decisiones, es decir, no necesitan saber quién los produjo, o cómo fueron producidos, o, más aún, no es necesario que sepan su procedencia. Es por lo anterior que el mercado competitivo se considera un fuerte mecanismo de asignación de recursos.

4.2.1. El caso excepcional de Arrow

Es necesario notar que el recíproco del teorema 4 no es necesariamente cierto, ni siquiera en el sencillo caso en que solamente existen dos grupos de agentes. Un contraejemplo famoso es el llamado “caso excepcional de Arrow”, el cual se presenta en este trabajo siguiendo a Varian (1999).

Así pues, considérese un diagrama como el siguiente:

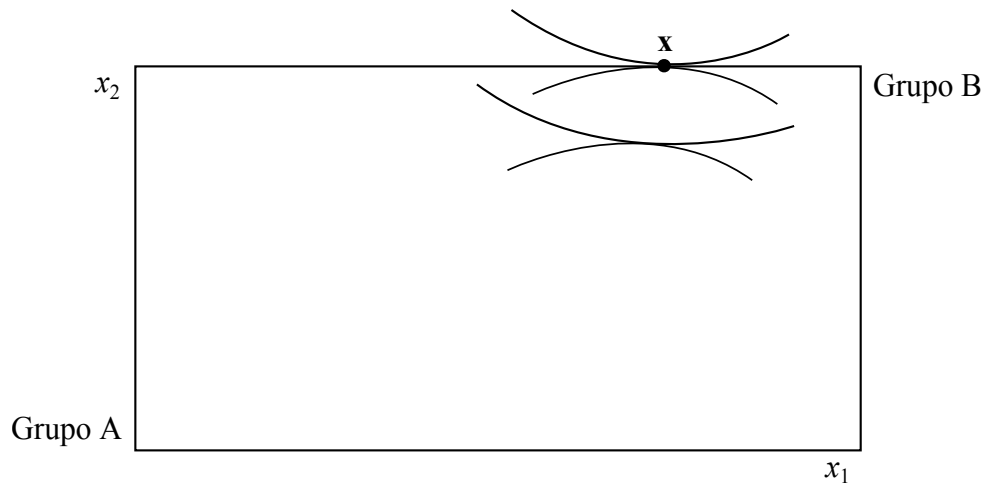


Figura 1: Caso excepcional de Arrow

Tenemos que la asignación $\mathbf{x}$ es eficiente en el sentido de Pareto, pero no existe ningún precio en el que se de un equilibrio walrasiano, ya que el grupo B no posee nada del bien 2.

En efecto, una de las condiciones para que un asignación eficiente en el sentido de Pareto sea un equilibrio walrasiano es que todos los consumidores posean cantidades estrictamente positivas de todos los bienes disponibles en el mercado.

4.3. Segundo teorema del bienestar

El segundo teorema del bienestar tiene la finalidad de proporcionar las condiciones de suficiencia para que una asignación óptima en el sentido de Pareto sea considerada como un equilibrio walrasiano.

Teorema 5. (Segundo teorema del bienestar) *Supongamos que $\mathbf{x}^*$ es una asignación eficiente en el sentido de Pareto en la que cada uno de los agentes posee una cantidad positiva de cada uno de los bienes. Supongamos también que las preferencias son continuas, convexas y monótonas. Entonces $\mathbf{x}^*$ es un equilibrio walrasiano.*

Demostración. Definamos el conjunto de todas las cestas que el agente prefiere estrictamente a $\mathbf{x}^*$ como

$$P_i = \{\mathbf{x}_i : \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^k : \mathbf{x}_i \succ \mathbf{x}^*\}$$

Luego a partir del conjunto P_i definimos el conjunto

$$P = \sum_{i=1}^n P_i = \left\{ \mathbf{z} : \mathbf{z} = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \text{ con } \mathbf{x}_i \in P_i \right\}$$

Así definido, P es el conjunto de los k bienes que pueden distribuirse entre los n agentes con el fin de mejorar el bienestar de cada uno de ellos. Ya que P_i es un conjunto convexo por hipótesis, entonces P debe serlo también.

Ahora bien, sea $\omega = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^*$, pero como $\mathbf{x}^*$ es una asignación eficiente en el sentido de Pareto, no existe ninguna reasignación que mejore el bienestar de todos los agentes, por lo que $\omega \notin P$, entonces, por el teorema del hiperplano

separador,⁶ tenemos que existe un vector de precios $\mathbf{p} \neq 0$ tal que

$$\mathbf{p}\mathbf{z} \geq \mathbf{p} \sum \mathbf{x}_i^* \text{ para toda } \mathbf{z} \in P$$

de donde

$$\mathbf{p} \left(\mathbf{z} - \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^* \right) \geq 0 \text{ para toda } \mathbf{z} \in P \quad (2)$$

Debemos probar que $\mathbf{p}$ es un vector de precios de equilibrio walrasiano. Para probar este hecho dividiremos la demostración en tres pasos.

Paso 1. Por demostrar que $\mathbf{p} \geq 0$

Consideremos el vector $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ por la monotonía en las preferencias tenemos que $\omega + e_i \in P$, ya que ahora se tiene una unidad más del bien i -ésimo, la cual es posible redistribuir entre todos los agentes, pero entonces

$$\mathbf{p}(\omega + e_i - \omega) \geq 0 \text{ con } i \in \{1, \dots, k\}$$

por lo que $p_i \geq 0$ para $i \in \{1, \dots, k\}$.

Paso 2. Por demostrar, si $\mathbf{y}_j \succ \mathbf{x}_j^*$, entonces $\mathbf{p}\mathbf{y}_j \geq \mathbf{p}\mathbf{x}_j^*$ en el caso de todos los agentes $j = 1, \dots, n$.

Si todos los agentes prefieren $\mathbf{y}_j$ a $\mathbf{x}_j^*$, entonces

$$\mathbf{p} \sum_{i=1}^n \mathbf{y}_j \geq \mathbf{p} \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j^*$$

Supongamos ahora que sólo un agente prefiere $\mathbf{y}_j$ a $\mathbf{x}_j$, y construyamos una asignación $\mathbf{z}$ distribuyendo alguna cantidad del agente j en favor del resto de los agentes, esto es

$$z_j = (1 - \theta) y_j$$

$$z_i = x_i^* + \frac{\theta y_j}{n - 1} \text{ para } i \neq j$$

⁶Véase el anexo de teoremas.

Si θ es lo suficientemente pequeño, el supuesto de monotonía fuerte implica que la asignación z se prefiere a $\mathbf{x}^*$, por lo que $\sum_{i=1}^n z_i \in P$. Aplicando la desigualdad 2, obtenemos

$$\mathbf{p} \sum_{i=1}^n z_i \geq \mathbf{p} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^*$$

$$\mathbf{p} \left[(1 - \theta) \mathbf{y}_j + \sum_{i \neq j} \mathbf{x}_i^* + \theta \mathbf{y}_j \right] \geq \mathbf{p} \left[\mathbf{x}_j^* + \sum_{i \neq j} \mathbf{x}_i^* \right]$$

de donde

$$\mathbf{p} \mathbf{y}_j \geq \mathbf{p} \mathbf{x}_j^*$$

Lo que hemos demostrado es que si el agente j prefiere $\mathbf{y}_j$ a $\mathbf{x}_j^*$, entonces $\mathbf{y}_j$ no puede ser más barata que $\mathbf{x}_j$.

Paso 3. Por demostrar, si $\mathbf{y}_j \succ \mathbf{x}_j^*$, entonces $\mathbf{p} \mathbf{y}_j > \mathbf{p} \mathbf{x}_j^*$ en el caso de todos los agentes $j = 1, \dots, n$.

Supongamos, por el contrario, que $\mathbf{p} \mathbf{y}_j = \mathbf{p} \mathbf{x}_j^*$. De acuerdo con el supuesto de preferencias continuas, podemos encontrar $0 < \theta < 1$, de tal manera que $\theta \mathbf{y}_j \succ \mathbf{x}_j^*$, entonces por el paso 2

$$\theta \mathbf{p} \mathbf{y}_j \geq \mathbf{p} \mathbf{x}_j^* \tag{3}$$

pero todos los componentes de $\mathbf{x}_j^*$ son estrictamente positivos, de donde $\mathbf{p} \mathbf{x}_j^* > 0$

Por lo que,

$$\mathbf{p} \mathbf{y}_j - \mathbf{p} \mathbf{x}_j^* = 0 \Rightarrow \theta \mathbf{p} \mathbf{y}_j < \mathbf{p} \mathbf{x}_j^*$$

lo que contradice la desigualdad 3. $\square$

El segundo teorema de la economía del bienestar establece que bajo ciertas condiciones las asignaciones que sean óptimos paretianos pueden lograrse mediante el criterio del equilibrio de mercados competitivos.

Este teorema implica que es posible separar los problemas relacionados con la distribución de aquellos ligados a la eficiencia. Además, muestra que los mercados competitivos son neutrales en cuanto a la asignación de recursos, ya que no toma en cuenta los criterios que se tengan sobre distribución justa.

Es así que los precios juegan un papel doble en los mercados competitivos:

1. Asignar los recursos
2. La distribución de los recursos

El primer punto se refiere a la escasez relativa, mientras que el segundo hace mención de las cantidades que pueden adquirir los agentes de cada bien.

5. Conclusiones

A manera de conclusión podemos mencionar que los teoremas del bienestar muestran que el mercado es un mecanismo eficiente para asignar los recursos, siempre que se satisfagan los supuestos explícitos e implícitos que dichos teoremas conllevan.

Sin embargo, debemos tener en cuenta que el principal supuesto tras los teoremas del bienestar está el cumplimiento de la Ley de Walras, pues esta es una de las hipótesis que dan lugar a la existencia de un equilibrio walrasiano, la cual a su vez tiene por hipótesis la optimización de la utilidad por parte de los agentes.

Lo anterior implicaría a su vez que los agentes cuentan con información que les permite tomar las decisiones de optimización de sus respectivas utilidades.

Referencias

- [1] Debreu, G. [1959] (1987). *Theory of value. An axiomatic analysis of economic equilibrium*, New Haven: Yale University Press.
- [2] Mas-Colell, A., M. D. Whinston and J. R. Green (1995). *Microeconomic theory*, New York: Oxford University Press.
- [3] Peressini, A. L., F. E. Sullivan and J. J. Uhl (1988). *The mathematics of nonlinear programming*, New York: Springer-Verlag.
- [4] Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis*, 3th ed., Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha.
- [5] Varian, H. R. (1992). *Análisis microeconómico*. 3a ed., Barcelona: Antoni Bosch, Editor.
- [6] _____ (1999). *Microeconomía intermedia. Un enfoque actual*, 5a ed., Barcelona: Antoni Bosch, Editor.
- [7] Zapata, P. (2007). *Economía, política y otros juegos. Una introducción a los juegos no cooperativos*, México: Las Prensas de Ciencias.

Anexo de Teoremas

Teorema 6. (Teorema del Heine-Borel) *Si E es un conjunto de $\mathbb{R}^n$ entonces, E es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

Teorema 7. (Punto Fijo de Brower) *Sea X un conjunto convexo y compacto de $\mathbb{R}^n$, y sea f una función continua que asocia a cada punto x de X un punto $f(x)$ de X ,*

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow X \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

entonces existe un punto $\hat{x} \in X$ que satisface $f(\hat{x}) = \hat{x}$.

Teorema 8. (Teorema del hiperplano separador) *Supóngase que C es un conjunto cerrado y convexo de $\mathbb{R}^n$, y que $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, y es tal que $\mathbf{y} \notin C$. Entonces existe un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ diferente de cero y un número real α tales que:*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \leq \alpha < \mathbf{a} \cdot \mathbf{y}$$

para toda $\mathbf{x} \in C$.