Ejercicios acerca del tema: Aproximación mediante funciones polinómicas
Cálculo Diferencial e Integral II

---

1. Dada una función f tal que $f^{(1)}(a)$, $f^{(2)}(a)$, . . . , $f^{(n)}(a)$ existen todas. Sabemos que el polinomio de Taylor de grado n para f en a tiene la siguiente expresión:

$$P_{n,a,f}(x)=a_0+a_1(x-a)+\cdots+a_n(x-a)^n$$

Escribir la expresión de los coeficientes a_k para $0\le k\le n$.

2. Hallar los polinomios de Taylor, del grado indicado y en el punto indicado para las siguientes funciones:

a) $f(x)=e^{e^x}$; grado 3, en 0

b) $f(x)=e^{sen(x)}$; grado 3, en 0

c) $f(x)=sen(x)$; grado 2n, en $\frac{\pi}{2}$

d) $f(x)=\cos(x)$; grado 2n, en π

e) $f(x)=exp(x)$; grado n, en 1

f) $f(x)=log(x)$; grado n, en 2

g) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$; grado 2n+1, en 0

h) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$; grado n, en 0

Sugerencia: Graficar con Maple o cualquier otro software, las funciones y tres polinomios de Taylor de diferente grado.

3. Escribir cada uno de los siguientes polinomios en x como polinomios en $x-3$.

a) x^2-4x-9	b) $x^4-12x^3+44x^2+2x+1$	c) ax^2+bx+c	d) x^5

4. Dada una función f tal que $f^{(0)}(a)=f(a)$, $f^{(1)}(a)$ y $f^{(2)}(a)$ existen.

Demostrar que si $P_{2,a,f}(x)$ es el polinomio de Taylor de grado 2 para f en a, entonces

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_{2,a,f}(x)}{(x-a)^2}=0$$

5. Hallar para cada una de las siguientes funciones su expresión en términos de su polinomio de Taylor en $a=0$ y de su Resto en su forma integral:

a) $\sin(x)$	b) $\cos(x)$	c) e^x	d) $\arctan(x)$

6. Hallar una estimación para cada uno de los Restos en su forma integral de las funciones del ejercicio inmediato anterior.

7. Demostrar que $\left|\int_0^x \frac{e^t}{n!}\ x-t\ ^n\,dt\right| \le \frac{|x|^{n+1}}{n+1\ !}$ para todo t en $[0,x]$

8. Mediante el Teorema de Taylor, demostrar que $2<e<3$.
Sugerencia: Ver las páginas 582 y 583 del Spivak.

9. Sabiendo que para todo n,

$$e=e^1=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ .\ .\ .\ +\frac{1}{n!}+R, \quad \text{donde} \quad 0<R<\frac{3}{(n+1)!}$$

Demostrar que e es un número irracional.

10. Aplicar el Teorema de Taylor para demostrar que
Si $f''(x)+f(x)=0,\ f(0)=0\ y\ f'(0)=0$ entonces $f(x)=0$.

Sugerencia: Recordar que el Teorema 4 afirma que

$$f(x)=f(a)+f'(a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_{n,f,a}(x)$$

Revisar también las páginas 587 y 588 del Spivak.

11. Supóngase que la función $f(x)$ es tal que existe su polinomio de Taylor de grado **n** en el punto $\boldsymbol{a}$.
Que el resto $R_{0,f,a}(x)=f(x)-f(a)$ y que la función $f^{(n+1)}$ es continua en $[a,x]$.

Demostrar por inducción matemática que $R_{n,f,a}(x)=\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt$ para todo $n\in N$.