

Demostrar que
$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c) dx$$

Supondremos que la función $f(x)$ es integrable en el intervalo $[a, b]$, y demostraremos que la función $g(x) = f(x-c)$ es integrable en el intervalo $[a+c, b+c]$, y que las integrales respectivas son iguales.

Demostración

Sea $g(x) = f(x-c)$ para todo $x \in [a+c, b+c]$.

Puesto que $f(x)$ es integrable en el intervalo $[a, b]$, por el Criterio de integrabilidad, tenemos que:

*Para todo $\varepsilon > 0$ existe $P = \{t_0 = a, \dots, t_n = b\}$ partición de $[a, b]$
tal que $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$*

Donde,
$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i (t_i - t_{i-1}), \quad L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i (t_i - t_{i-1}),$$

y
$$M_i = \sup \{ f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i \}, \forall i = 1..n$$

$$m_i = \inf \{ f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i \}, \forall i = 1..n$$

Sea $P' = \{t'_0 = a+c, \dots, t'_i = t_i + c, \dots, t'_n = b+c\}$ partición de $[a+c, b+c]$ construida a partir de la partición $P = \{t_0 = a, \dots, t_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$.

Sean $M'_i = \sup \{ g(x) : t'_{i-1} \leq x \leq t'_i \}$ y $m'_i = \inf \{ g(x) : t'_{i-1} \leq x \leq t'_i \}$ donde $t'_i = t_i + c, \forall i = 1..n$

Pero,

$$\begin{aligned} M'_i &= \sup \{ g(x) : t'_{i-1} \leq x \leq t'_i \} = \sup \{ g(x) : t_{i-1} + c \leq x \leq t_i + c \} = \sup \{ f(x-c) : t_{i-1} \leq x-c \leq t_i \} \\ &= \sup \{ f(w) : t_{i-1} \leq w \leq t_i \} = M_i, \forall i = 1..n \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} m'_i &= \inf \{ g(x) : t'_{i-1} \leq x \leq t'_i \} = \inf \{ g(x) : t_{i-1} + c \leq x \leq t_i + c \} = \inf \{ f(x-c) : t_{i-1} \leq x-c \leq t_i \} \\ &= \inf \{ f(w) : t_{i-1} \leq w \leq t_i \} = m_i, \forall i = 1..n \end{aligned}$$

Por tanto,

$$L(g, P') = \sum_{i=1}^n m'_i (t'_i - t'_{i-1}) = \sum_{i=1}^n m_i (t_i - t_{i-1}) = L(f, P)$$

$$U(g, P') = \sum_{i=1}^n M'_i (t'_i - t'_{i-1}) = \sum_{i=1}^n M_i (t_i - t_{i-1}) = U(f, P)$$

Entonces,

$$U(g, P') = U(f(x-c), P') = U(f, P) \quad \text{y} \quad L(g, P') = L(f(x-c), P') = L(f, P)$$

Así, dado $\varepsilon > 0$ existe $P' = \{t'_0 = a+c, \dots, t'_i = t_i + c, \dots, t'_n = b+c\}$ partición de $[a+c, b+c]$ tal que $U(g, P') - L(g, P') = U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$

Se sigue que $g(x) = f(x-c)$ es integrable en el intervalo $[a+c, b+c]$.

Además,

$$\int_a^b f(x) dx = \sup \{L(f, P)\} = \sup \{L(g, P')\} = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c) dx$$

$$\text{Por tanto, } \int_a^b f(x) dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c) dx$$

Q.E.D.