

Ejercicios del Tema de Integrales
Cálculo Diferencial e Integral II

1. a) Sean A y B dos conjuntos no vacíos de números reales, tales que $B \subset A$ y A está acotado superiormente. Demostrar que B está acotado superiormente y que $\sup B \leq \sup A$
b) Sean A y B dos conjuntos no vacíos de números reales, tales que $B \subset A$ y A está acotado inferiormente. Demostrar que B está acotado inferiormente y que $\inf A \leq \inf B$
2. Sea f una función acotada superiormente sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y $[c, d] \subset [a, b]$.
a) Demostrar que f está acotada superiormente sobre $[c, d]$.
b) ¿Cuál relación se puede establecer entre los siguientes conjuntos $\{f(x) : c \leq x \leq d\}$ y $\{f(x) : a \leq x \leq b\}$? ¿Son acotados superiormente estos conjuntos? Si es así, ¿cuál relación entre sus supremos correspondientes puede establecerse?
3. Sea f una función acotada inferiormente sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y $[c, d] \subset [a, b]$.
a) Demostrar que f está acotada inferiormente sobre $[c, d]$.
b) ¿Cuál relación se puede establecer entre los siguientes conjuntos $\{f(x) : c \leq x \leq d\}$ y $\{f(x) : a \leq x \leq b\}$? ¿Son acotados inferiormente estos conjuntos? Si es así, ¿cuál relación entre sus ínfimos correspondientes puede establecerse?
4. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada.
a) ¿Qué se entiende por una P partición de $[a, b]$?
b) ¿Qué se entiende por una Suma Superior de f para P partición de $[a, b]$?
c) ¿Qué se entiende por una Suma Inferior de f para P partición de $[a, b]$?
d) ¿Cuándo se dice que f es integrable en $[a, b]$?
e) De acuerdo con el criterio ε - P partición, ¿Cuándo se dice que f es integrable en $[a, b]$?
5. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada.
a) ¿Cuántas particiones puede tener el intervalo $[a, b]$?
b) ¿Cuántos puntos como mínimo puede tener una partición de $[a, b]$?
c) ¿Cuántos puntos como máximo puede tener una partición de $[a, b]$?
d) ¿La unión de dos particiones de $[a, b]$ es una partición de $[a, b]$?
e) Si f es continua en $[a, b]$ ¿Quiénes serían m_i y M_i en cada subintervalo de una partición de $[a, b]$?

6. Sea f una función acotada sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y sean P y Q dos particiones del intervalo cerrado $[a, b]$ tales que $P \subset Q$ y Q tiene exactamente un punto más que P . Demostrar que $U(f, P) \geq U(f, Q)$.

7. Calcular la suma superior e inferior para cada una de las siguientes funciones en el intervalo indicado. Utilizar una partición P de 5 elementos tal que cada intervalo cerrado generado por la partición tenga la misma longitud.

$f(x) = x^3$ en $[1, 3]$	$f(x) = \frac{1}{x}$ en $[3, 5]$	$f(x) = \sqrt{x}$ en $[2, 5]$	$f(x) = x^2$ en $[0, 4]$
--------------------------	----------------------------------	-------------------------------	--------------------------

8. a) ¿Qué funciones definidas en un intervalo cerrado $[a, b]$, tienen la propiedad de que toda suma inferior es igual a toda suma superior?
 b) ¿Qué funciones continuas en un intervalo cerrado $[a, b]$, tienen la propiedad de que todas las sumas inferiores son iguales?

9. Sea $b > 0$. Usar el criterio de integrabilidad de f sobre $[a, b]$. Demostrar que:

a) $\int_0^b \frac{x}{3} dx = \frac{b^2}{6}$	b) $\int_0^b \frac{x^2}{2} dx = \frac{b^3}{6}$	c) $\int_0^b 3x^2 dx = b^3$
--	--	-----------------------------

Sugerencia: usar $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$ o $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall n \in \mathbb{N}$ según sea el caso.

10. Obtener sin hacer cálculos complicados, pero explicando detalladamente cada uno de sus argumentos, la relación entre las integrales de cada inciso (observa la simetría de las funciones):

i) $\int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$ y $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$	ii) $\int_{-2}^2 x^4 \sqrt{1-x^2} dx$ y $\int_0^2 x^4 \sqrt{1-x^2} dx$	iii) $\int_{-3}^3 x^8 \sqrt{1-x^2} dx$ y $\int_0^3 x^8 \sqrt{1-x^2} dx$
---	--	---

11. Decidir cuáles de las siguientes funciones son integrables sobre $[0, 2]$. Argumentar su respuesta en términos de la definición de integrabilidad de una función en un cerrado $[a, b]$. Calcular la integral cuando sea posible.

i) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq \frac{1}{2} \\ 2 & \text{si } x = \frac{1}{2} \end{cases}$	ii) $f(x) = [x] + x$
iii) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es irracional} \\ 0, & \text{si } x \text{ es racional} \end{cases}$	iv) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 0.5, & \text{si } x = 2 \end{cases}$

12. Sean $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $g:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones acotadas. Analice las siguientes proposiciones y justifique sus respuestas detalladamente.

- a) Si $f+g$ es integrable sobre $[a,b]$, entonces f y g son integrables sobre $[a,b]$.
- b) Si fg es integrable sobre $[a,b]$, entonces f y g son integrables sobre $[a,b]$.
- c) Si $f-g$ es integrable sobre $[a,b]$, entonces f y g son integrables sobre $[a,b]$.

13. Demostrar. Si $a < b < c < d$ y f es integrable sobre $[a,d]$, entonces f es integrable sobre $[b,c]$.

14. Demostrar. Si f es integrable sobre $[a,b]$ y $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f \geq 0$

15. Demostrar. Si f y g son integrables sobre $[a,b]$ y $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f \geq \int_a^b g$.

16. Demostrar.

a) Si f es integrable en $[a,b]$ y $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a,b]$, entonces existe un número μ tal que $\int_a^b f(x) = (b-a)\mu$, con $m \leq \mu \leq M$.

b) Si f es continua en $[a,b]$ entonces existe $\xi \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f(x) = (b-a)f(\xi)$.

c) De un modo más general, supóngase que f es continua en $[a,b]$ y que g es integrable y no negativa en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$.
(Este resultado recibe el nombre de Teorema del Valor Medio para integrales).

17. Demostrar. Si f es integrable sobre $[a,b]$ entonces $|f|$ es integrable sobre $[a,b]$.
Recordar que $|f|(x) = |f(x)|, \forall x \in [a,b]$.

18. Demostrar. Si f es integrable sobre $[a,b]$, entonces $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$.

19. Demostrar. $\int_a^b f(x) dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c) dx$

Sugerencia: Toda partición $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ de $[a,b]$ da origen a una partición

$$P' = \{t'_0, \dots, t'_n\} = \{t_0 + c, \dots, t_n + c\} \text{ de } [a+c, b+c] \text{ y viceversa.}$$

20. Demostrar que

$$\int_1^a \frac{1}{t} dt + \int_1^b \frac{1}{t} dt = \int_1^{ab} \frac{1}{t} dt$$

Sugerencia: Puede escribirse $\int_1^a \frac{1}{t} dt = \int_b^{ab} \frac{1}{t} dt$. Pues Toda partición $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ de $[1, a]$ da origen a una partición $P' = \{t'_0, \dots, t'_n\} = \{bt_0, \dots, bt_n\}$ de $[b, ab]$ y viceversa.

21. Demostrar. $\int_{ca}^{cb} f(x) dx = c \int_a^b f(cx) dx$.

Obsérvese que se trata de un caso particular del ejercicio anterior.

22. Sea $b > 0$. Supóngase que f es una función integrable sobre $[-b, b]$.

a) Si f es una función par, demostrar que $\int_{-b}^b f(x) dx = 2 \int_0^b f(x) dx$

b) Si f es una función impar, demostrar que $\int_{-b}^b f(x) dx = 0$

23. Suponer que f es no decreciente sobre $[a, b]$. Observar que f está automáticamente acotada sobre $[a, b]$, ya que $f(a) \leq f(x) \leq f(b), \forall x \in [a, b]$.

a) Si $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$, determinar $L(f, P)$ y $U(f, P)$

b) Suponer que $t_i - t_{i-1} = \delta$ para todo $i = 1 \dots n$, (esto significa que todos los intervalos tienen la misma longitud). Demostrar que $U(f, P) - L(f, P) = \delta[f(b) - f(a)]$

c) Demostrar que f es integrable en $[a, b]$.

d) Dar un ejemplo de una función no decreciente sobre $[0, 1]$ que sea discontinua en un número infinito de puntos.

24. Sea f definida en el intervalo cerrado $[0, 1]$ cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

¿Es f integrable en $[0, 1]$? Si la respuesta es sí, calcular la integral.

Bibliografía

- 1) Spivak, Michael. Calculus. 2da. Edición Editorial Reverté.
- 2) Thomas, George. Cálculo de una variable. 9ª. Edición. PEARSON. Addison Wesley Longman
- 3) Arizmendi, Carrillo, Lara. Cálculo.
- 4) Haaser, Lasalle, Sullivan. Introducción al Análisis Matemático. Vol.I. Editorial Trillas.
- 5) Purcell, Varberg, Rigdon. Cálculo. 9ª. Edición. PEARSON. Prentice Hall.
- 6) Suplemento de Spivak.