Hallar la derivada de la siguiente función $sen\left(\int_0^x sen\left(\int_0^y sen^3 t\ dt\right)dy\right)$

Solución.

Sea $\rho(x)=sen\left(\int_0^x sen\left(\int_0^y sen^3 t\ dt\right)dy\right)$.

Denotemos por $\alpha(y)=\int_0^y sen^3 t\ dt$, entonces

$$\rho(x)=sen\left(\int_0^x sen\left(\int_0^y sen^3 t\ dt\right)dy\right)=sen\left(\int_0^x sen(\alpha(y))\,dy\right)$$

Ahora, si denotamos por $F(x)=\int_0^x sen(\alpha(y))dy$, entonces la igualdad anterior se puede escribir como

$$\rho(x)=sen\left(\int_0^x sen(\alpha(y))\,dy\right)=sen(F(x))$$

Por tanto, $\rho(x)=sen(F(x))$.

Así que para derivar $\rho(x)$ debemos aplicar la Regla de la Cadena.

Antes, haremos algunas precisiones:

Primero, por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, la función $\alpha(y)=\int_0^y sen^3 t\ dt$ es una derivable, pues $sen^3 t$ es una función continua en todo $\mathbb{R}$.,y en consecuencia, al ser derivable $\alpha(y)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

Segundo, nuevamente, por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, la función $F(x)=\int_0^x sen(\alpha(y))dy$ es derivable, pues la función $sen(\alpha(y))$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y $F'(x)=sen(\alpha(x))$

Por tanto, efectivamente podemos aplicar la Regla de la Cadena y derivar $\rho(x)$

Por tanto,

$$\rho'(x)=(sen\circ F)'(x)=sen'(F(x))F'(x)=\cos(F(x))F'(x)=\cos\left(\int_0^x sen(\alpha(y))\,dy\right)sen(\alpha(x))$$

pero, $\alpha(y)=\int_0^y sen^3 t\ dt$

Por tanto, $\rho'(x)=\cos\left(\int_0^x sen(\alpha(y))\,dy\right)sen\left(\int_0^x sen^3 t\ dt\right)$.