Ejercicios acerca del tema: Teorema Fundamental del Cálculo
Cálculo Diferencial e Integral II

1. Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $F(x)=\int_a^x \sin^3(t)\,dt$

b) $F(x)=\int_a^{\int_1^x \sin^3(t)dt} \dfrac{1}{1+\sin^6(t)+t^2}\,dt$

c) $F(x)=\int_{15}^x \left(\int_8^y \dfrac{1}{1+t^2+\sin^3(t)}\,dt\right)$

2. Hallar una función continua f que satisfaga $\int_0^x f(t)dt=(f(x))^2+C$.

3. Hallar $F'(x)$ si $F(x)=\int_0^x xf(t)\,dt$

4. Demostrar que si h es continua, f y g son derivables y $F(x)=\int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\,dt,$

entonces: $F'(x)=h(g(x))\cdot g'(x)-h(f(x))\cdot f'(x)$

5. Demostrar que si f es continua, entonces $\int_0^x f(u)\cdot(x-u)\,du=\int_0^x\left(\int_0^u f(t)\,dt\right)du.$

6. Sea $f(x)=0$ para x racional y $f(x)=1$ para x irracional.

a) Calcular $L(f,P)$ y $U(f,P)$ para todas las particiones P del intervalo cerrado $[0,1]$.

b) Hallar $\sup\{L(f,P): P \textit{ es partición de } [0,1]\}$ e

$\inf\{U(f,P): P \textit{ es partición de } [0,1]\}$

7. Hallar una función f tal que $f'''(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+\sin^2(x)}}$

8. Hallar $f^{-1}(0)$, la imagen inversa de 0, si

a) $f(x)=\int_0^x 1+\sin(\sin t)dt$

b) $f(x)=\int_0^x \sin(\sin t)dt$

9. En cada caso, calcular el área de la región delimitada por las curvas:

i) $f(x)=x^3-x$ y $g(x)=\begin{cases}x^2, & si\ x\geq 0\\ -x^2, & si\ x<0\end{cases}$	**ii)** $f(x)=x^3-x$ y $g(x)=-x^3+2x$	**iii)** $f(x)=x^3-x$ y $g(x)=\begin{cases}-x^2, & si\ x\geq 0\\ x^2, & si\ x<0\end{cases}$

Integrales Impropias

10. ¿Cuáles de las siguientes son integrales son impropias? Argumentar su respuesta.

a) $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$	**b)** $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$	**c)** $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)}dx$	**d)** $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{(1+x)}}dx$

11. Cada una de las siguientes integrales **es impropia**. Demostrar si es o no convergente según el caso.

a) $\int_0^\infty x^r dx,\ si\ r<-1$	**b)** $\int_1^\infty \frac{1}{x}\ dx$
c) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\ dx$	**d)** $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\ dx$
e) $\int_0^a x^r dx,\ si\ -1<r<0$	**f)** $\int_0^1 \frac{1}{x}\ dx$

12. Calcular la $\int_0^\infty f(x)\ dx$, si $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & 0\le x\le 1 \\ \frac{1}{x^2}, & x\ge 1 \end{cases}$

Bibliografía

1) Spivak, Michael. Calculus. 2da. Edición Editorial Reverté.
2) Thomas, George. Cálculo de una variable. 9ª. Edición. PEARSON. Addison Wesley Longman
3) Arizmendi, Carrillo, Lara. Cálculo.
4) Haaser, Lasalle, Sullivan. Introducción al Análisis Matemático. Vol.I. Editorial Trillas.
5) Purcell, Varberg, Rigdon. Cálculo. 9ª. Edición. PEARSON. Prentice Hall.
6) Suplemento de Spivak.